

Нетрадиционный путь формирования уравнений движения судна

А.А. Котов¹, М.Н. Красносельский²

¹ Политехнический факультет МГТУ, кафедра ВМ и ПО ЭВМ

² Судоводительский факультет МА МГТУ, кафедра судовождения

Аннотация. Уравнения движения формируются применительно к проблеме управляемости судна, поэтому речь идет об описании плоскопараллельного движения объекта. При этом уравнения движения рассматриваются как классические уравнения динамики жесткого диска, обладающего собственной инерционностью и находящегося под воздействием активных сил со стороны движителя и реактивных сил со стороны окружающей судно воды, в том числе и инерционных. В этом состоит отличие предлагаемого взгляда от традиционной и преобладающей ныне точке зрения на уравнения движения как на уравнения инерционного равновесия системы "судно – окружающая жидкость". Имеется также некоторая специфика в выборе системы координат и в описании действующих на судно сил.

Abstract. Movement equations have been formulated as applied to vessel manoeuvrability. Movement equations have been considered to be classical ones of rigid disc dynamics. The rigid disc possesses its own inertiality and is influenced by active forces of the mover and reactive forces of surrounding water including inertial forces as well. There is a difference from the traditional point of view which considers movement equations to be equations of inertial equilibrium of the system "vessel – surrounding liquid". Some specificity in co-ordinates' choice has also taken place in the paper.

1. Введение. Мотивы постановки вопроса

В настоящее время традиционный путь формирования уравнений движения судна по акватории, используемых в теории управляемости и представленных в большинстве научной, учебной и справочной литературы (Басин, 1968; Васильев, 1989; Гофман, 1988) состоит примерно в следующем. За основу принимаются результаты решения задачи гидромеханики о движении твердого тела в безграничной абсолютно несжимаемой и абсолютно невязкой жидкости под действием сил, внешних по отношению к телу, и к жидкости (Кочин и др., 1955). Эти результаты коротко можно представить следующим образом.

Тело V , ограниченное поверхностью S , движется в безграничной жидкости под действием сил F и M , приложенных исключительно к телу и на жидкость никакого влияния не оказывающих (например, силы магнитного поля по отношению к находящемуся в воде металлическому телу, рис. 1). В наиболее простой постановке движение тела считается заданным, и задача ставится для потенциала скоростей $\varphi(x,y,z)$ жидкости, приходящей в движение под действием движущегося в ней тела, а также для сил давления на поверхность тела со стороны жидкости.

Потенциал скоростей φ находится как решение уравнения неразрывности жидкости

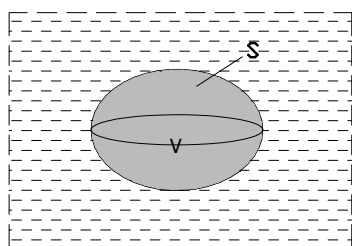


Рис. 1

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 + \partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0 \quad (1)$$

с реализацией граничных условий на поверхности тела

$$\partial \varphi / \partial n|_S = u_n \quad (2)$$

и на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \partial \varphi / \partial x = \lim_{r \rightarrow \infty} \partial \varphi / \partial y = \lim_{r \rightarrow \infty} \partial \varphi / \partial z = 0. \quad (3)$$

Силы, действующие на поверхность тела, находятся интегрированием давлений по его поверхности:

$$\mathbf{R} = - \iint_S p \, d\mathbf{S}, \quad \mathbf{L} = - \iint_S p (\mathbf{r} \times d\mathbf{S}). \quad (4)$$

С учетом уравнения Бернулли

$$p = p_0 - \rho(\partial \varphi / \partial t) - (\rho v^2 / 2) \quad (5)$$

путем достаточно сложных рассуждений (Кочин и др., 1955) они выражаются через потенциал скоростей следующим образом:

$$\mathbf{R} = d \left(\iint_S \rho \varphi \, d\mathbf{S} \right) / dt, \quad \mathbf{L} = d \left[\iint_S \rho \varphi (\mathbf{r} \times d\mathbf{S}) \right] / dt. \quad (6)$$

В результате уравнения динамики для тела должны быть записаны в виде

$$d\mathbf{G}/dt = \mathbf{R} + \mathbf{F}, \quad d\mathbf{Q}/dt = \mathbf{L} + \mathbf{M}, \quad (7)$$

где \mathbf{G} и \mathbf{Q} , соответственно, главный вектор и главный момент количества движения твердого тела.

Из (7) с учетом (6) получаются соотношения

$$d(\mathbf{G} - \iint_S \rho \varphi d\mathbf{S})/dt = \mathbf{F}, \quad d[\mathbf{Q} - \iint_S \rho \varphi (\mathbf{r} \times d\mathbf{S})]/dt = \mathbf{M}, \quad (8)$$

структура которых такова, что она позволяет величины

$$\mathbf{B} = -\rho \iint_S \varphi d\mathbf{S} \quad \text{и} \quad \mathbf{I} = -\rho \iint_S \varphi (\mathbf{r} \times d\mathbf{S}) \quad (9)$$

считать, соответственно, главным вектором и главным моментом количества движения жидкости, вызываемого заданным движением твердого тела. При этом очевидно, что

$$\mathbf{R} = -d\mathbf{B}/dt, \quad \mathbf{L} = -d\mathbf{I}/dt.$$

В итоге проведенных рассуждений основные уравнения динамики сложной системы "тело – окружающая жидкость" можно записать традиционным образом:

$$d(\mathbf{G} + \mathbf{B})/dt = \mathbf{F}, \quad d(\mathbf{Q} + \mathbf{I})/dt = \mathbf{M}, \quad (10)$$

или

$$d\mathbf{K}/dt = \mathbf{F}, \quad d\mathbf{N}/dt = \mathbf{M}, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{Q} + \mathbf{I}. \quad (12)$$

При этом следует помнить, что хотя уравнения (11) и выглядят вполне обычно, особенность их состоит в том, что внешние силы \mathbf{F} и \mathbf{M} действуют только на тело, а количество движения \mathbf{K} и его момент \mathbf{N} вычисляются для всей системы "тело – окружающая жидкость".

Величинам \mathbf{B} и \mathbf{I} должны соответствовать некоторые характеристики инерционности приводимой в движение жидкости. Эти характеристики принято некоторым образом связывать с движущимся телом и поэтому называть присоединенными массами тела (хотя по своей сути это массы жидкости).

Присоединенные массы можно определить теоретически в рамках рассматриваемой задачи следующим образом.

Два вектора (9), характеризующие количество движения жидкости, можно унифицировано описать шестью скалярами:

$$\begin{aligned} B_1 \equiv B_x &= -\rho \iint_S \varphi \cos \alpha dS, & B_4 \equiv I_x &= -\rho \iint_S \varphi (y \cos \gamma - z \cos \beta) dS, \\ B_2 \equiv B_y &= -\rho \iint_S \varphi \cos \beta dS, & B_5 \equiv I_y &= -\rho \iint_S \varphi (z \cos \alpha - x \cos \gamma) dS, \\ B_3 \equiv B_z &= -\rho \iint_S \varphi \cos \gamma dS, & B_6 \equiv I_z &= -\rho \iint_S \varphi (x \cos \beta - y \cos \alpha) dS. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее возвращаемся к граничному условию на поверхности тела (2). Скорость точек на поверхности в направлении внешней нормали \mathbf{n} :

$$u_n = u_x l + u_y m + u_z n; \quad (14)$$

здесь l , m и n – направляющие косинусы нормали. Из формулы для скорости любой точки тела

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где \mathbf{U} и $\boldsymbol{\omega}$, соответственно, – скорость центра тяжести и угловая скорость тела, получаем

$$\begin{aligned} u_x &= U_x + \omega_y z - \omega_z y, \\ u_y &= U_y + \omega_z x - \omega_x z, \\ u_z &= U_z + \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \quad (15)$$

и, подставляя последнее в (14), имеем:

$$u_n = U_x l + U_y m + U_z n + \omega_x (y n - z m) + \omega_y (z l - x n) + \omega_z (x m - y l). \quad (16)$$

Вводя это далее в граничное условие (2), получаем уравнение

$$\partial \varphi / \partial \mathbf{n} = U_x l + U_y m + U_z n + \omega_x (y n - z m) + \omega_y (z l - x n) + \omega_z (x m - y l). \quad (17)$$

Структура его такова, что производная от потенциала скоростей по нормали оказывается разложенной по компонентам скорости тела U_x , U_y , U_z , ω_x , ω_y , ω_z . С учетом того, что они являются константами по отношению к нормали \mathbf{n} , соотношение (17) удобно переписать в следующем виде:

$$\partial\varphi/\partial\mathbf{n} = U_x\partial\varphi_1/\partial\mathbf{n} + U_y\partial\varphi_2/\partial\mathbf{n} + U_z\partial\varphi_3/\partial\mathbf{n} + \omega_x\partial\varphi_4/\partial\mathbf{n} + \omega_y\partial\varphi_5/\partial\mathbf{n} + \omega_z\partial\varphi_6/\partial\mathbf{n}. \quad (18)$$

Здесь произвольно введены обозначения

$$\partial\varphi_1/\partial\mathbf{n} \equiv l, \quad \partial\varphi_2/\partial\mathbf{n} \equiv m, \quad \partial\varphi_3/\partial\mathbf{n} \equiv n, \quad \partial\varphi_4/\partial\mathbf{n} \equiv yn - zm, \quad \partial\varphi_5/\partial\mathbf{n} \equiv zl - xn, \quad \partial\varphi_6/\partial\mathbf{n} \equiv xm - yl, \quad (19)$$

определяющие вновь введенные величины $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ и φ_6 . Их смысл становится понятным, если (18) проинтегрировать в виде

$$\varphi = U_x\varphi_1 + U_y\varphi_2 + U_z\varphi_3 + \omega_x\varphi_4 + \omega_y\varphi_5 + \omega_z\varphi_6, \quad (20)$$

а затем унифицировать обозначения скоростей:

$$U_x \equiv u_1, \quad U_y \equiv u_2, \quad U_z \equiv u_3, \quad \omega_x \equiv u_4, \quad \omega_y \equiv u_5, \quad \omega_z \equiv u_6. \quad (21)$$

После этого разложение (20) потенциала по скоростям получаем в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^6 \varphi_i u_i, \quad (22)$$

откуда очевидно, что φ_i – это потенциал скоростей жидкости, вызываемый только компонентной u_i скорости тела при нулевых остальных скоростях.

С учетом введения формулой (19) частных потенциалов φ_i унифицированные импульсы B_i из (13) переписутся следующим образом:

$$B_i = -\rho \iint_S \varphi \partial\varphi/\partial\mathbf{n} dS. \quad (23)$$

Подставляя далее сюда φ из (22), получаем

$$B_i = -\rho \iint_S \sum_{k=1}^6 \varphi_k u_k \partial\varphi_i/\partial\mathbf{n} dS = \sum_{k=1}^6 (-\rho \iint_S \partial\varphi_i/\partial\mathbf{n} \varphi_k dS) u_k, \quad (24)$$

или, переобозначив

$$\lambda_{ik} \equiv -\rho \iint_S \partial\varphi_i/\partial\mathbf{n} \varphi_k dS, \quad (25)$$

получаем

$$B_i = \sum_{k=1}^6 \lambda_{ik} u_k, \quad (26)$$

т.е. традиционную форму для импульса в виде суммы произведения скоростей u_k на некоторые меры инертности λ_{ik} . Поскольку эти меры инертности умножаются на скорость тела u_k , то их принято называть присоединенными массами тела, хотя по своей сущности они являются, конечно, характеристиками инертности жидкости, приведенной в движение твердым телом.

Итак, теоретически присоединенные массы определяются соотношениями (23) через потенциалы скоростей жидкости.

Теперь вспомним о том, что здесь нас изначально интересуют уравнения динамики твердого тела с тем, чтобы далее их как-то можно было адаптировать для описания движения судна по поверхности акватории. Здесь эти уравнения динамики можно рассматривать в виде (10) или (11). В них импульсы тела \mathbf{G} и \mathbf{Q} выражаются через массы (моменты инерции) и скорости u_k традиционным образом; импульсы жидкости \mathbf{B} и \mathbf{I} определяются соотношениями (26) и (13), а присоединенные массы λ_{ik} должны быть найдены по формуле (25). При этом очевидно, что предварительно для тела данной формы S должны быть найдены частные потенциалы скоростей жидкости, т.е. ее потенциалы, вызываемые по отдельности простейшими формами движения тела с данной поверхностью. В результате исполнения всех этих процедур должны получаться шесть дифференциальных уравнений для скоростей u_k ; мы не считаем нужным их здесь выписывать вследствие их громоздкости и необязательности для формирования выводов, являющихся целью настоящей работы. А главной целью является ответ на вопрос, насколько хороши уравнения динамики, получаемые рассмотренным образом, для описания движения судна как такового. Нам представляется, что они не совсем хороши, и причины этого попытаемся сформулировать по пунктам.

1) Подавляющее большинство реально существующих судов самоходны и имеют собственный движитель, преимущественно в виде винта. Наличие такого движителя совершенно не учитывается в рассмотренной задаче, и поэтому результаты ее решения никак не могут быть приложены к судну с движителем. Сила, действующая на движитель (и далее на судно) со стороны жидкости, и равная ей сила, действующая на жидкость со стороны движителя, никак не могут быть учтены в рамках рассмотрения системы "тело – окружающая жидкость", т.к. они являются внутренними по отношению к системе. С другой стороны, наличие на судне движителя существенно меняет потенциал скоростей жидкости и, следовательно, так называемые присоединенные массы тела. При наличии винта

совершенно не ясно, как ставить граничные условия для потенциала; во всяком случае в рамках рассмотренной задачи об этом ничего не говорится.

Таким образом, движение судна за счет собственных ресурсов путем отталкивания от воды, а не вследствие внешних приложенных к нему сил в корне меняет постановку задачи, и описанные выше результаты здесь никак не применимы.

2) В рассмотренной задаче гидромеханики судно окружено жидкостью со всех сторон безгранично, т.е. свободная поверхность отсутствует. В реальном надводном судне этого нет, поэтому для приложения результатов задачи к такому судну приходится считать достаточно достоверной гипотезу о дублированном относительно поверхности акватории судне вместе с массивом самой воды (Басин, 1968). Такое дублирование не противоречило бы постановке задачи гидромеханики, если бы движение судна по поверхности акватории не вызывало возмущения этой изначально плоской поверхности. Реалии же таковы, что поверхность акватории в достаточно обширной окрестности возмущается весьма заметно, и вследствие этого потенциалы скоростей жидкости в полупространстве со свободной поверхностью должны заметно отличаться от потенциалов скоростей в половине бесповерхностного пространства. То есть при внедрении указанной гипотезы опять происходит существенное искажение присоединенных масс.

3) В классической гидромеханике (Кочин и др., 1955) хорошо известно, что многие результаты, получаемые для идеальной жидкости, значительно расходятся с действительностью. В особенности это относится к расчету сил сопротивления, встречаемого телом при движении в жидкости. Дело в том, что всякая реальная жидкость обладает вполне ощутимой вязкостью, а наличие даже весьма малой вязкости может значительно видоизменить поле скоростей, а следовательно, и связанное с ним поле гидродинамических давлений вокруг тела. То есть присоединенные массы, найденные в решении рассмотренной задачи гидромеханики и формирующие силы сопротивления движению тела, с неизбежностью весьма существенно отличаются от реальных.

4) В обсуждаемой литературе уравнения динамики системы "тело – окружающая жидкость" формально записаны в таком виде, в котором они справедливы только в инерциальной системе координат. В то же время утверждается, что все рассматривается в подвижной системе координат, связанной с судном. Здесь нелишне отметить, что записать уравнения динамики для судна в системе координат, жестко связанной с судном, в принципе невозможно, поскольку относительно этой системы судно априорно неподвижно (движется вместе с нею). Здесь должна быть развита диалектика от первоначальной записи уравнений в неподвижной, инерциальной системе координат и их последующем проектировании на оси, связанные с судном, иначе неясности неизбежны. Надо сказать, что и в первоисточнике (Кочин и др., 1955) вопросы выбора системы координат обозначены недостаточно четко, а у последователей они вообще находятся в тени, что в первоначальном изучении этих вопросов недостаточно искусственным читателем вызывает определенное недоумение. Из всего сказанного вытекает необходимость искать другие, более ясные пути формирования уравнений движения судна. Один из них мы и хотим предложить вниманию читателей.

2. Естественный путь формирования уравнений движения судна на акватории

Движение судна изначально рассматривается в неподвижной системе координат $x_0Oy_0z_0$ (рис. 2), связанной, например, с берегами акватории. При этом объектом, движение которого рассматривается и описывается, является исключительно только судно, кинематика окружающей среды как таковая совершенно игнорируется. В этой постановке задачи в уравнения динамики должны будут входить только силы, действующие непосредственно на судно. Такие силы удобно раскладывать по естественным осям судна: продольной, поперечной и вертикальной. Поэтому уравнения движения логично формировать в проекциях именно на эти оси. Следовательно, одновременно с неподвижной системой координат $x_0Oy_0z_0$ рассматривается подвижная, связанная с судном система координат xCy (см. рис. 2). Обе эти системы координат при направлениях осей Oz_0 и Cz вертикально вверх являются правыми, что традиционно для классической механики и не традиционно для теории управления судном. Здесь, кстати, можно отметить еще одно противоречие в традиционной теории управления судном: всюду используются левые системы координат, а векторные произведения силовых и кинематических параметров записываются как для правой (Васильев, 1989). Исторически сложившаяся в

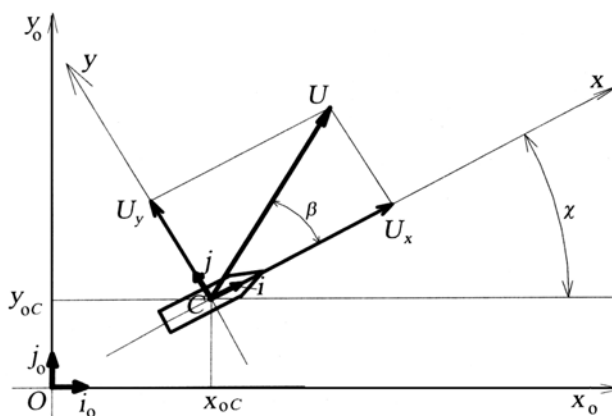


Рис. 2

судовождении специфика выбора систем координат при решении поставленной задачи как задачи классической механики изначально представляется не совсем уместной.

Здесь, когда вводится в рассмотрение система координат xSy_z , не следует считать, что уравнения движения формируются в подвижной, неинерциальной системе координат, связанной с судном (хотя подобные утверждения о формировании уравнений в подвижной системе координат тоже можно встретить в современной литературе по управляемости судна). В такой системе координат все кинематические параметры судна были бы тождественно равны нулю, а уравнения динамики имели бы неканонический вид. На самом деле речь идет только о преобразовании векторных соотношений, составленных в инерциальной системе координат $x_0Oy_0z_0$, к виду, в котором неподвижные координаты выражаются через подвижные, и осуществляется это преимущественно проектированием векторных соотношений на определенные для данного момента времени направления, переменные по отношению к фиксированным инерциальным.

На рис. 2, показывающем обе используемые системы координат, явным образом не указаны вертикальные оси, направленные вверх от плоскости рисунка: z_0 , имеющая начало в т. O , и z , имеющая начало в т. C . Направление оси Cx , связанной с судном, выбрано традиционным, совпадающим с продольной осью судна. А ось Sy направлена противоположно тому, как это принято в книгах по управлению судном. Это сделано с той целью, чтобы системы координат были правыми, т.е. чтобы уравнения классической механики, содержащие векторные произведения, выглядели бы канонически.

Принятые направления осей Cx и Sy автоматически определяют положительные направления скоростей центра масс судна U_x и U_y и угла дрейфа β , которые, несмотря на предыдущие отличия, совпадают с традиционными.

Запишем уравнения динамики для плоскопараллельного движения судна в инерциальной системе координат $x_0Oy_0z_0$ в векторной форме:

$$d\mathbf{G}/dt = \mathbf{F}, \quad (27)$$

$$d\mathbf{Q}_0/dt = \mathbf{M}_0. \quad (28)$$

Здесь, как и ранее, \mathbf{G} – главный вектор количества движения, а \mathbf{Q}_0 – его главный момент относительно начала координат O инерциальной системы; \mathbf{F} – главный вектор сил, действующих на судно, \mathbf{M}_0 – их главный момент относительно точки O . При этом считаем, что \mathbf{M}_0 и \mathbf{Q}_0 перпендикулярны плоскости движения, т.е. параллельны осям Oz_0 и Cz . Другими словами, вертикальные составляющие сил и скоростей не учитываем.

В уравнении (27) векторы \mathbf{G} и \mathbf{F} можно раскладывать по направлениям любых координатных осей, инерциальных или неинерциальных. Если раскладывать их по инерциальным осям Ox_0 и Oy_0 в виде

$$\mathbf{G} = mU_{x0}\mathbf{i}_0 + mU_{y0}\mathbf{j}_0, \quad \mathbf{F} = F_{x0}\mathbf{i}_0 + F_{y0}\mathbf{j}_0, \quad (29)$$

то

$$d\mathbf{G}/dt = m(dU_{x0}/dt)\mathbf{i}_0 + m(dU_{y0}/dt)\mathbf{j}_0, \quad (30)$$

и из векторного уравнения (27) получаются два скалярных уравнения

$$m dU_{x0}/dt = F_{x0}, \quad m dU_{y0}/dt = F_{y0}, \quad (31)$$

представляющие собой канонический вид второго закона Ньютона для поступательного движения. Если же вектор \mathbf{G} раскладывать по неинерциальным осям Cx и Sy , т.е.

$$\mathbf{G} = mU_x\mathbf{i} + mU_y\mathbf{j}, \quad \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}, \quad (32)$$

то при подстановке этого в (27) дифференцировать следует не только скорости U_x и U_y , но и орты \mathbf{i} и \mathbf{j} подвижных осей:

$$d\mathbf{G}/dt = m[(dU_x/dt)\mathbf{i} + U_x d\mathbf{i}/dt + (dU_y/dt)\mathbf{j} + U_y d\mathbf{j}/dt]. \quad (33)$$

Далее, чтобы найти $d\mathbf{i}/dt$ и $d\mathbf{j}/dt$, векторы \mathbf{i} и \mathbf{j} раскладываем по ортам инерциальных осей:

$$\mathbf{i} = \cos\chi\mathbf{i}_0 + \sin\chi\mathbf{j}_0, \quad \mathbf{j} = -\sin\chi\mathbf{i}_0 + \cos\chi\mathbf{j}_0. \quad (34)$$

Тогда

$$d\mathbf{i}/dt = -\sin\chi d\chi/dt \mathbf{i}_0 + \cos\chi d\chi/dt \mathbf{j}_0 = \omega(-\sin\chi\mathbf{i}_0 + \cos\chi\mathbf{j}_0) = \omega\mathbf{j}, \quad (35)$$

$$d\mathbf{j}/dt = -\cos\chi \omega \mathbf{i}_0 - \sin\chi \omega \mathbf{j}_0 = -\omega(\cos\chi\mathbf{i}_0 + \sin\chi\mathbf{j}_0) = -\omega\mathbf{i}. \quad (36)$$

Подставляя (35) и (36) в (33), получаем:

$$d\mathbf{G}/dt = m[(dU_x/dt - \omega U_y)\mathbf{i} + (dU_y/dt + \omega U_x)\mathbf{j}]. \quad (37)$$

В результате векторное уравнение (27) в неинерциальной системе xSy_z записывается следующим образом:

$$m(dU_x/dt - \omega U_y)\mathbf{i} + m(dU_y/dt + \omega U_x)\mathbf{j} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}. \quad (38)$$

Оно эквивалентно двум скалярным уравнениям

$$m(dU_x/dt - \omega U_y) = F_x, \quad m(dU_y/dt + \omega U_x) = F_y, \quad (39)$$

представляющим собой уравнения динамики поступательного движения в системе координат $x_0y_0z_0$.

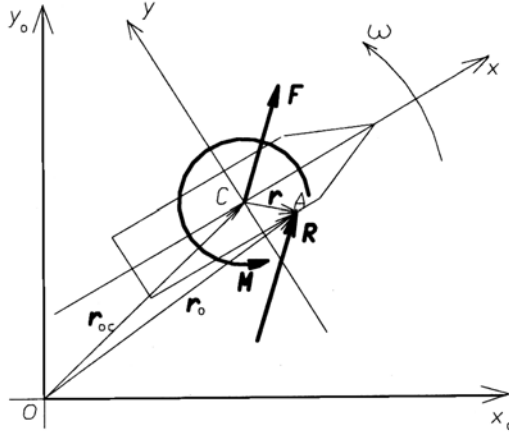


Рис. 3

Реализуем теперь аналогичную процедуру приведения к неинерциальным осям $x_0y_0z_0$ векторного уравнения (26). Для этого, аналогично предыдущему, векторы M_0 и Q_0 нужно записать по возможности в ортах \vec{i} и \vec{j} с тем, чтобы далее эти орты дифференцировать по времени. Для большей наглядности преобразований изобразим еще раз системы координат с необходимыми векторами (рис. 3).

На этом рисунке R – равнодействующая всех внешних по отношению к судну горизонтальных сил, приложенная в некоторой точке A . Приведением равнодействующей R к центру тяжести судна C получаем главный вектор F и главный момент M_c . Тогда:

$$M_0 = r_0 \times R = (r_c + r) \times R = r_c \times R + r \times R = r_c \times F + M_c; \quad (40)$$

$$Q_0 = J_c \omega + m r_c \times U. \quad (41)$$

Оба последних вектора теперь следует представить в виде разложений по ортам \vec{i} и \vec{j} подвижной системы координат:

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} r_{cx} & r_{cy} & 0 \\ F_x & F_y & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} + 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + M_c \vec{k} = (r_{cx} F_y - r_{cy} F_x + M_c) \vec{k}; \quad (42)$$

$$\vec{Q}_0 = J_c (0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + \omega \vec{k}) + m \begin{vmatrix} r_{cx} & r_{cy} & 0 \\ U_x & U_y & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = [J_c \omega + m(r_{cx} U_y - r_{cy} U_x)] \vec{k}. \quad (43)$$

Для подстановки в (28) вектор Q_0 дифференцируем по времени:

$$\begin{aligned} dQ_0/dt &= d[J_c \omega + m(r_{cx} U_y - r_{cy} U_x)]/dt \vec{k} = \\ &= [J_c d\omega/dt + m(dr_{cx}/dt U_y + r_{cx} dU_y/dt - dr_{cy}/dt U_x - r_{cy} dU_x/dt)] \vec{k}. \end{aligned} \quad (44)$$

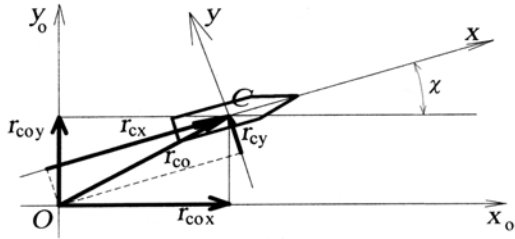


Рис. 4

Здесь требуется найти удобные для формирования уравнений формы для производных dr_{cx}/dt и dr_{cy}/dt . Используем для этого преобразования (45), полученные в соответствии с рис. 4:

$$\begin{aligned} r_{cx} &= r_{c0x} \cos \chi + r_{c0y} \sin \chi, \\ r_{cy} &= r_{c0y} \cos \chi - r_{c0x} \sin \chi. \end{aligned} \quad (45)$$

Дифференцируя каждое из соотношений (45) по времени и используя установленные ранее преобразования скоростей при изменении системы координат, получаем:

$$\begin{aligned} dr_{cx}/dt &= dr_{c0x}/dt \cos \chi - r_{c0x} \sin \chi d\chi/dt + dr_{c0y}/dt \sin \chi + r_{c0y} \cos \chi d\chi/dt = \\ &= U_{x0} \cos \chi + U_{y0} \sin \chi + \omega (r_{c0y} \cos \chi - r_{c0x} \sin \chi) = U_x + \omega r_{cy}; \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} dr_{cy}/dt &= dr_{c0y}/dt \cos \chi - r_{c0y} \sin \chi d\chi/dt - dr_{c0x}/dt \sin \chi - r_{c0x} \cos \chi d\chi/dt = \\ &= U_{y0} \cos \chi - U_{x0} \sin \chi - \omega (r_{c0x} \cos \chi + r_{c0y} \sin \chi) = U_y - \omega r_{cx}. \end{aligned} \quad (47)$$

После подстановки (46) и (47) в (44) последнее приобретает вид

$$\begin{aligned} dQ_0/dt &= [J_c d\omega/dt + m(U_x + \omega r_{cy}) U_y + r_{cx} dU_y/dt - (U_y - \omega r_{cx}) U_x - r_{cy} dU_x/dt] \vec{k} = \\ &= [J_c d\omega/dt + r_{cx} m(dU_y/dt + \omega U_x) - r_{cy} m(dU_x/dt - \omega U_y)] \vec{k}. \end{aligned} \quad (48)$$

Подставляя теперь (48) и (42) в (26), получаем скалярное соотношение

$$J_c d\omega/dt + r_{cx} m(dU_y/dt + \omega U_x) - r_{cy} m(dU_x/dt - \omega U_y) = r_{cx} F_y - r_{cy} F_x + M_c,$$

из которого после элементарных преобразований получается

$$J_c d\omega/dt + r_{cx}[m(dU_y/dt + \omega U_x) - F_y] - r_{cy}[m(dU_x/dt - \omega U_y) - F_x] = M_c. \quad (49)$$

С учетом двух полученных ранее уравнений динамики (39) второе и третье слагаемые в левой части уравнения (49) обращаются в ноль, в результате чего окончательно получается третье уравнение динамики плоскопараллельного движения судна в подвижной системе координат:

$$J_c d\omega/dt = M_c.$$

Этот простой результат может показаться тривиальным, поскольку изначально ясно, что оси Oz_0 и Cz совпадают по направлению. Однако приведенное здесь его строгое обоснование не должно казаться излишним, т.к. оно снимает все сомнения в его достоверности, которые могут возникнуть из-за несовпадения полюсов O и C приведения моментов сил и количеств движения.

В итоге полная система уравнений в координатах $xOyz$ записывается следующим образом:

$$\begin{cases} m(dU_x/dt - \omega U_y) = F_x, \\ m(dU_y/dt - \omega U_x) = F_y, \\ J_c(d\omega/dt) = M_c. \end{cases} \quad (50)$$

Подчеркнем еще раз, что в левых частях уравнений (50) присутствуют кинематические и инерционные характеристики только судна, но никак не жидкости. Воздействие жидкости на корпус судна должно быть отражено в правых частях этих уравнений в составе сил, действующих на корпус судна. Здесь, справа, должны быть учтены силы любой природы, действующие на судно со стороны любого источника. В их составе обязательно и традиционно должны учитываться силы инерционного и позиционного сопротивления жидкости, зависящие от ускорений и скоростей судна. При этом характер их зависимости не может быть определен никак иначе, как только экспериментально, и определяется он формой судна и свойствами жидкости. Эксперименты по определению этих зависимостей фактически аналогичны традиционным экспериментам по определению т.н. присоединенных масс судна, но само понятие присоединенных масс здесь совершенно не обязательно и даже, скорее, излишне. Разработка методики подобных экспериментов и их теоретического обоснования может являться естественным продолжением настоящей работы.

3. Выводы

Показано, что вполне возможен более естественный и более простой путь формирования уравнений динамики плоскопараллельного движения судна по акватории, нежели тот, который принят в традиционной литературе по судовождению. Этот путь опирается на общие методы классической механики и не использует результатов решения задачи гидромеханики о движении несамородного тела в безграничной несжимаемой жидкости, а поэтому свободен от всех присущих ей допущений и погрешностей. Демонстрируемый здесь подход предполагает определение гидродинамических характеристик судна в легко осуществимых модельных или натуральных экспериментах, причем использование отвлеченного понятия присоединенных масс здесь совершенно не обязательно.

Литература

- Басин А.М.** Ходкость и управляемость судов. М., Транспорт, 256 с., 1968.
Васильев А.В. Управляемость судов. Л., Судостроение, 328 с., 1989.
Гофман А.Д. Движительно-рулевой комплекс и маневрирование судна: Справочник. Л., Судостроение, 360 с., 1988.
Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч. I. М., Гостехтеориздат, 560 с., 1955.