

УДК 656.61.052.5 : 551.467 : [621.396.96 : 621.1]

К вопросу об оптимальном плавании судна во льдах. Использование радиотеплолокации

**А.Н. Калитёнков, А.Н. Суслов, Н.В. Калитёнков, В.И. Милкин,
А.Н. Кучура, М.С. Иванюгин**

*Судоводительский факультет МА МГТУ, кафедра радиотехники
и радиотелекоммуникационных систем; кафедра судовождения*

Аннотация. Решается задача о нахождении минимального времени прохождения через ледовую область маршрута плавания, при условии, что плотность льда в акватории является функцией обеих координат.

Abstract. In this paper the authors have analyzed the problem of finding the minimum of time for passing through the ice area of the navigation route provided that the density of ice is a function of both coordinates.

Ключевые слова: оптимальный маршрут плавания, ледовая обстановка, радиотеплолокатор, скорость движения судна во льдах
Key words: optimum navigation route, ice condition, thermal radar, vessel velocity in ice

1. Введение

Одной из важнейших задач, решаемых судоводителем при плавании судна во льдах, является задача о выборе оптимального (безопасного и минимального по времени прохождения) пути плавания. Наиболее простым является случай перехода через ледовую полосу, внутри которой параметры льда являются постоянными. Аналитическое решение может быть получено и в случае выбора пути, оптимального по времени перехода через ледовую зону, сопротивление льда в которой меняется по линейному закону в направлении, перпендикулярном направлению на конечную точку, а вдоль направления на эту точку сопротивление постоянно (слоистость в заданном направлении). Параметры льда получают на основе целого ряда наблюдений, проводимых с использованием различной, в том числе и спутниковой аппаратуры. Из современных технических средств радиотехнической информационной поддержки безопасного судовождения наиболее эффективным средством является радиолокатор. Однако современные радиолокаторы в условиях Северного Ледовитого океана не всегда способны своевременно обнаруживать опасные ледовые образования и обеспечивать оценку сплошности льда. Лёд, слабо отражая радиоволны, является в то же время интенсивным источником теплового излучения. Тепловое радиоизлучение при использовании на судах радиотеплолокаторов позволяет идентифицировать опасные ледовые образования и производить оценку сплошности льда. Как наличие в акватории отдельных ледовых образований, так и большие площади сплошного льда требуют специфических подходов при организации маршрутов плавания. При этом важно знать, какими возможностями обладает установленное на судне оборудование, и уметь решать навигационные задачи для конкретных условий.

2. Обнаружительные способности радиотеплолокаторов

Оценим минимальные размеры опасных ледовых образований, разрешимых с помощью радиотеплолокатора. Пусть радиотеплолокатор имеет следующие технические характеристики: чувствительность – $\Delta T_{A \min} = 0,1$ °К/сек, скорость обзора пространства – 3 сек, ширина диаграммы направленности антенны – $\Omega_A = 1^\circ$ ($\Omega_A \approx 0,0175$ рад). При таких технических параметрах устройства неподвижная цель, угловые размеры которой меньше ширины диаграммы направленности антенны, будет находиться в пределах главного лепестка антенны приблизительно в течение промежутка времени $\tau \approx 0,008$ сек. Тогда минимальный контраст воспринимаемых за время τ радиотеплолокатором яркостных температур составит

$$\Delta T = \frac{\Delta T_{A \min}}{\sqrt{\tau}} = \frac{0,1}{\sqrt{0,008}} \approx 1^\circ K.$$

При наблюдении малоразмерных целей полезный сигнал принимается не во всём угле Ω_A , а лишь в его части $\Omega_{Ц}$, охватывающей цель. Поэтому реально наблюдаемый температурный контраст определяется следующим выражением:

$$\Delta T^* = \frac{\Delta T_A \Omega_{Ц}}{\Omega_A},$$

где $\Delta T_{Я}$ – контраст яркостных температур цели и фона.

При $\Delta T^* > \Delta T$ минимальный угловой размер ледового образования, которое обнаруживается при помощи радиотеплолокатора, составит

$$\Omega_{L \min} = \frac{\Delta T \Omega_A}{\Delta T_{Я.ЛВ}},$$

где $\Delta T_{Я.ЛВ}$ – контраст яркостных температур льда и поверхности воды.

При $\Delta T_{Я.ЛВ} \approx 45^\circ \text{ К}$,

$$\Omega_{L \min} \approx \frac{1 \cdot 0,0175}{45} \approx 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Тогда на расстоянии 3 морские мили ($D = 5556 \text{ м}$) линейные размеры ледового образования, соответствующие $\Omega_{L \min}$, составляют величину, равную $L_{\min} = \Omega_{L \min} D = 3,9 \cdot 10^{-4} \cdot 5556 \approx 2,17 \text{ м}$.

Таким образом, в случае применения на транспортных и специальных судах радиотеплолокаторов можно будет обнаруживать отдельные ледовые образования "небольших" размеров, а также получать данные, необходимые для оценки пространственной сплочённости льда.

3. Оптимизация прокладки маршрута плавания во льдах

Карты ледового покрытия с характеристиками льда, полученные со спутников и с помощью радиотеплолокатора, достаточно информативны и не зависят от погодных условий и условий освещения (день/ночь). Наличие таких карт дает возможность отойти от описательного характера льдов к их математическим образам с целью последующей оптимизации прокладки маршрутов плавания через ледовую зону. Решим такую задачу при условии, что плотность льда в акватории является функцией обеих координат. Используя методы вариационного исчисления, можно определить траекторию движения судна во льдах, обеспечивающую минимальное время движения. Выражение для времени движения во льдах имеет вид

$$t = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}{V(xy)} dx.$$

Тогда уравнение Эйлера для функционала

$$F(xy, y'_x) = \frac{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}{V(xy)}$$

запишется стандартным образом

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'_x} = 0,$$

или в окончательном виде

$$V'_y - V'_x \cdot y'_x - V(xy) \cdot \frac{y''_{xx}}{1 + (y'_x)^2} = 0.$$

Решение этого уравнения с учетом зависимости $V(xy)$ позволяет найти оптимальный по времени и энергетическим затратам путь во льдах.

Значение скорости движения судна здесь выражено через параметры льда функцией координат $V(xy)$, которая, как показывает практика, может быть представлена неоднородным многочленом второй степени (мультипликативной функцией) относительно x и y

$$V(x_i) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 A_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^2 B_i x_i + C,$$

где все коэффициенты – действительные числа, $x_1 = x$, $x_2 = y$ и $A_{i,j} = A_{j,i}$.

1. Рассмотрим случай, когда ранги матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы системы $V(x_i)$

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \end{pmatrix}$$

не равны. Подвергнем переменные x_i преобразованию

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix},$$

где P_i, Q_i являются корнями следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (A_{11} - S_i)P_i + A_{12}Q_i &= 0 \\ A_{21}P_i + (A_{22} - S_i)Q_i &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, 2,$$

а S_i находятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} A_{11} - S & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - S \end{vmatrix} = 0,$$

P_i, Q_i , соответствуют определенному S_i и удовлетворяют следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} P_1^2 + Q_1^2 &= 1 \\ P_2^2 + Q_2^2 &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad P_1P_2 + Q_1Q_2 = 0, \quad \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} = 1,$$

в этом случае преобразованный многочлен (аддитивная функция координат) будет иметь вид

$$V(x'_i) = \sum_{i=1}^2 S_i x'_i + 2 \sum_{i=1}^2 B_i^* x'_i + C^*,$$

где $B_i^* = B_1 P_i + B_2 Q_i$, $C^* = C$.

Таким образом, предлагаемый подход позволяет перейти от мультипликативного (по координатам) представления скорости движения во льдах к ее аддитивному представлению, и задача нахождения оптимального маршрута существенно упрощается.

2. Обратимся ко второму случаю – случаю, когда ранг матрицы системы A и ранг расширенной матрицы равны. В общем виде функция $V(xy)$ может быть представлена в матричной форме

$$V(xy) = X'AX + 2 X'B + c,$$

где

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Подвергнув выражение для скорости движения во льдах преобразованию

$$X = Y + W,$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad w_i -$$

некоторые числа, которые мы в дальнейшем выберем специальным образом, получаем

$$V(xy) = (Y' + W') A(Y + W) + 2(Y' + W')B + c.$$

Учитывая, что $(W'AY)' = W'AY$, так как $W'AY$ – одноэлементная матрица, это выражение можно представить в следующем виде

$$V(xy) = Y'AY + 2Y'(AW + B) + W'(AW + B) + W'B + c.$$

Выберем теперь W так, чтобы выражение $AW + B$ обратилось в нуль. Это можно сделать, так как система уравнений $AW + B = 0$ совместна (ранги матрицы системы и расширенной матрицы системы по условию равны).

Итак, если мы выберем матрицу W решением уравнения $AW + B = 0$, то многочлен примет вид

$$V(xy) = Y'AY + W'B + c.$$

Квадратичную форму $Y'AY$ с матрицей A приведем к каноническому виду при помощи преобразования переменных, $Y = TZ$, где $T = (t_i t_j)$ – ортогональная матрица. Получаем для скорости движения во льдах следующую функцию аддитивного вида

$$V(xy) = \sum_1^2 \lambda_i z_i^2 + c_1, \quad \text{где } c_1 = W'B + c,$$

причем, если $\det A = 0$, то некоторые коэффициенты λ_i равны нулю.

Следует отметить, что если $\det A \neq 0$, то свободный член c_1 можно определить, не решая предварительно системы

$$AW + B = 0$$

относительно W , так как $c_1 = W'B + c$, где W определяется из предыдущего условия, то c_1 можно найти из системы $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными:

$$\begin{aligned} AW &= -B, \\ W'B - c_1 &= -c. \end{aligned}$$

Или в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ b_1 & b_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -c \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -b_1 \\ a_{21} & a_{22} & -b_2 \\ b_1 & b_2 & -c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ b_1 & b_2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = \frac{K}{\det A}.$$

Итак, если $\det A \neq 0$ и $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$, то выражение для скорости движения во льдах принимает вид аддитивной функции координат

$$V(xy) = \sum_1^2 \lambda_i z_i^2 + \frac{K}{\det A},$$

что позволяет так же, как и в первом случае, существенно упростить задачу решения уравнения, описывающего оптимальный по времени путь во льдах.

Применим представленные выше выкладки к конкретным ледовым условиям. Рассмотрим случай, когда

$$V(xy) = 1 - a \cdot (y + mx - H_0) - b \cdot (y + mx - H_0)^2,$$

где a, b, m – некоторые коэффициенты.

После преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} & \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \\ \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

будем иметь

$$V(y_1) = 1 - a \cdot (\sqrt{m^2+1} \cdot y_1 - H_0) - b (\sqrt{m^2+1} \cdot y_1 - H_0)^2.$$

Поскольку подынтегральная функция не зависит от x_1 , то

$$F_{y_1} - \frac{d}{dx} F_{y_1'} = F_{y_1} - F_{y_1' y_1'} y_1'' - F_{y_1' y_1} y_1' = 0.$$

Умножив это выражение на y_1' , получим

$$\frac{d}{dx} (F - y_1' F_{y_1'}) = 0.$$

Уравнение Эйлера в рассматриваемом случае имеет первый интеграл

$$F - y_1' F_{y_1'} = C.$$

Задача нахождения оптимального по времени маршрута плавания решена с использованием достаточно реалистичной аппроксимации ледовой обстановки – сопротивляемость льда движению представлена неоднородным многочленом второй степени (мультипликативной функцией) относительно x и y .

4. Заключение

Таким образом, полученный результат свидетельствует о том, что в случае применения на транспортных и специальных судах радиотеплолокаторов можно будет обнаруживать отдельные ледовые образования небольших размеров, а также иметь данные, необходимые для оценки сплочённости льда. В частности, данные, получаемые с помощью радиотеплолокатора, позволят определять с высокой точностью коэффициенты для аппроксимации скорости движения судна во льдах. Наличие на судне такой информации будет способствовать принятию судоводителем правильных управленческих решений и обеспечивать тем самым как безопасность навигации, так и безопасную эксплуатацию судна в целом.