

УДК 629.5.015.2

## О моделировании сил, действующих на судно при его движении

А.А. Котов

*Естественнo-техничecкий факультет МГТУ, кафедра промышленного и гражданского строительства*

**Аннотация.** В соответствии с концепцией формирования уравнений движения судна по акватории, в которой инерционные характеристики жидкости отделены от кинематических параметров судна, правые части этих динамических уравнений формируются независимо от левых как суммы внешних по отношению к судну сил. Этот путь неизбежно ориентирован исключительно на экспериментальное определение сил сопротивления жидкости движению судна как позиционных, пропорциональных квадратам скоростей, так и инерционных, пропорциональных ускорениям. Предметом настоящей работы является формирование принципиальных основ постановки экспериментов для определения указанных сил сопротивления.

**Abstract.** According to the conception of forming equations of vessel's movement along the area of water where inertial characteristics of liquid are separated from vessel's kinematic parameters, right parts of these dynamic equations are formed regardless of left ones as amount of powers exterior to the vessel. This method is directed to experimental determination of resistance forces of liquid to vessel's movement both positional, proportionate to squared velocities, and inertial, proportionate to accelerations. The aim of the work is to formulate fundamentals of setting experiments for determining indicated resistance forces.

**Ключевые слова:** феноменологическая теория движения судна; экспериментальное определение сил сопротивления; силы позиционные (скоростные) и инерционные; принципиальные основы постановки экспериментов; безразмерная форма уравнений  
**Keywords:** phenomenological theory of vessel's movement, experimental determination of resistance force, position and inertia forces, fundamentals of experiment setting, dimensionless form of equations

### 1. Введение. Уравнения движения и минимальный набор сил

Скалярные уравнения динамики плоскопараллельного движения судна можно представить (Котов, Красносельский, 2006) в виде

$$\begin{aligned} m(dv_x/dt - v_y\omega) &= R_x, \\ m(dv_y/dt + v_x\omega) &= R_y, \\ J(d\omega/dt) &= M(R). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $\omega$  – проекции скорости судна в инерциальной системе координат  $x_0y_0Oz_0$  на координатные оси, связанной с судном неинерциальной системы  $xуCz$  (рис. 1). В правых частях уравнений (1) находятся две проекции ( $R_x$ ,  $R_y$ ) равнодействующей  $R$  внешних по отношению к судну сил и ее момент  $M(R)$  относительно подвижной оси  $Cz$ .

Главная задача настоящей работы состоит в том, чтобы правильно сформулировать содержание правых частей уравнений (1) в соответствии с принятой концепцией решения задачи о динамике судна на акватории.

Минимально необходимый набор сил, действующих на судно всегда при его активном движении по водной поверхности, должен включать в себя: 1) движущие силы (силы, действующие со стороны жидкости на движитель); 2) силы управления (силы, действующие со стороны жидкости на рули); 3) силы сопротивления (силы, действующие со стороны жидкости на корпус). Последние в соответствии с общепринятыми представлениями можно условно разделить на инерционные (пропорциональные ускорениям) и позиционные (пропорциональные квадратам скоростей). Здесь сочтем нужным отметить, что название "позиционные" силы сопротивления произошло, видимо, от того, что они в традиционных представлениях зависят не только от суммарной линейной скорости  $v$ , но и от угла дрейфа  $\beta$ , т.е. от позиции судна по отношению к вектору скорости  $v$ . Однако поскольку этим же углом дрейфа  $\beta$  определяются величины проекций скорости  $v$  на оси  $Cx$  и  $Cy$  –  $v_x$  и  $v_y$ , то можно говорить о зависимости позиционных сил не от суммарной скорости  $v$  и угла  $\beta$ , а непосредственно от составляющих скорости  $v_x$  и  $v_y$ , что гораздо удобнее, чем их выражение через  $v$  и  $\beta$ . При этом вполне можно допустить независимость друг от друга позиционных сил  $X_\beta$  и  $Y_\beta$ . Именно этой точки зрения далее и будем придерживаться. Более

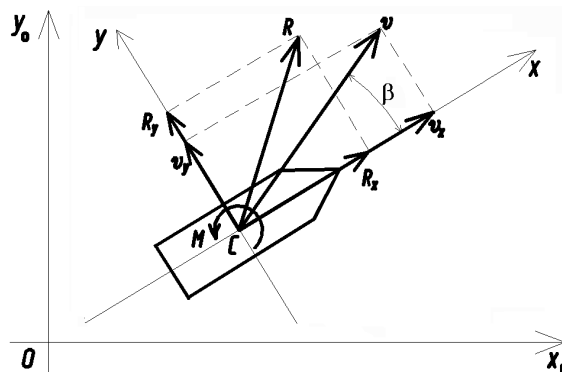


Рис. 1

того, поскольку угол дрейфа  $\beta$  формально перестает быть основным определяющим параметром величины "позиционных" сил, а скорость таковой остается, то вполне уместно эти силы сопротивления называть не позиционными, а скоростными, и обозначать их не с индексом  $\beta$ , а с индексом скорости, т.е.  $X_v$ ,  $Y_v$  и  $M_\omega$ . Продолжая эти представления о природе сил сопротивления, отметим, что так называемыми демпфирующими силами, пропорциональными произведениям линейной и угловой скоростей, вполне логично пренебречь, т.к. принятый за основу принцип аддитивности сил сопротивления предполагает невозможность независимости демпфирующих сил от позиционных.

В соответствии с изложенным, уравнения движения с минимальным набором сил в правой части конкретизируются следующим образом:

$$\begin{aligned} m(dv_x/dt - v_y\omega) &= X_T + X_v + X_n + X_r, \\ m(dv_y/dt + v_x\omega) &= Y_T + Y_v + Y_n + Y_r, \\ J(d\omega/dt) &= M_T + M_\omega + M_n + M_r. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь индексом "Т" обозначены силы тяги, "и" – инерционные силы сопротивления, "r" – силы, действующие на руль. Расчетная схема приложения к судну этих сил изображена на рис. 2. При этом моменты, не показанные явным образом, определяются от соответствующих сил по представленной на рис. 2 геометрии.

## 2. Основная часть. Теоретические основы эксперимента

Рассматривая простейший вариант судна с одним продольным движителем, для продольной силы тяги можно принять в соответствии с работой (Юдин, Котов, 2000):

$$X_T = (A_n - B_n v_x) [1 + c_{1m} ((v_x^2 + (v_y - \omega l_T)^2)^{0.5} - v_x) / (v_x^2 + (v_y - \omega l_T)^2)^{0.5}], \quad (3)$$

где

$$A_n = k_{T0} \rho n D^4, \quad (4)$$

$$B_n = k_{T0} (1 - \psi) \rho n D^3 \lambda_o. \quad (5)$$

В формуле (3) первый множитель можно преобразовать следующим образом:

$$A_n - B_n v_x = A_n (1 - B_n v_x / A_n) = A_n (1 - (1 - \psi) v_x / (n D \lambda_o)) = A_n (1 - v_x / v_n), \quad (6)$$

где

$$v_n = n D \lambda_o / (1 - \psi) = n p. \quad (7)$$

Здесь  $v_n$  характеризует конструкцию винта (шаг  $p$ ) и скорость его вращения (число оборотов в единицу времени  $n$ ) и представляет собой скорость судна, при которой движитель имеет нулевую тягу, т.е. как бы ввинчивается в жидкость без сопротивления. Тогда отношение

$$v_x \equiv v_x / v_n \quad (8)$$

представляет собой некую относительную безразмерную продольную скорость судна.

Продолжая построение зависимостей в относительных, безразмерных характеристиках, обратимся снова к формуле (4). Сила тяги винта  $A_n$  при нулевой относительной скорости судна определяется размером ( $D$ ) и формой ( $k_{T0}$ ) винта, плотностью жидкости  $\rho$  и скоростью вращения винта  $n$ . При этом параметр тяги  $k_{T0}$ , согласно формуле (4), имеет размерность  $c^{-1}$ , т.е. размерность скорости вращения  $n$ . Переходя к безразмерному параметру  $k_T$  тяги, формулу (4) можно заменить формулой

$$X_n = k_T n^2 D^4, \quad (9)$$

где  $k_T$  – безразмерный параметр тяги, характеризующий исключительно только форму винта и подлежащий определению в эксперименте, и введено переобозначение  $A_n \equiv X_n$ . Тогда

$$X_T = X_n (1 - v_x) [1 + c_{1m} ((v_x^2 + (v_y - \omega l_T)^2)^{0.5} - v_x) / (v_x^2 + (v_y - \omega l_T)^2)^{0.5}]. \quad (10)$$

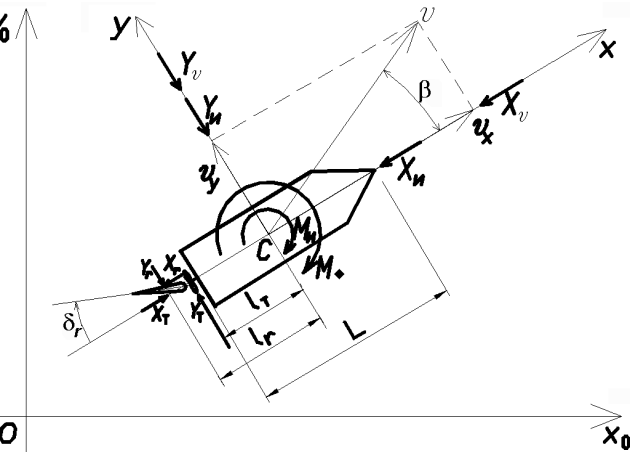


Рис. 2

Чтобы пользоваться формулой (10) практически, необходимо уметь вычислять величину  $X_n$ , а для этого нужен безразмерный параметр тяги винта  $\kappa_T$ , который иначе как экспериментально определить невозможно. Следовательно, необходим опыт, в котором можно было бы определить величину  $X_n$ , тогда  $\kappa_T$  определился бы формулой

$$\kappa_T = X_n / (\rho n^2 D^4), \quad (12)$$

где  $X_n$  – определенное в эксперименте значение силы  $X_n$ . Как организовать такой эксперимент?

Прежде всего, преобразуем формулу (10) следующим образом:

$$X_T = X_n (1 - v_x) [1 + c_{1m} ((1 - v_x / (v_x^2 + (v_y - \omega l_T)^2)^{0.5})].$$

Отсюда видно, что величина  $X_n$  равна силе тяги на винте при условиях  $v_x = 0$  и  $v_y - \omega l_T = 0$ . Следовательно, если мы хотим измерить  $X_n$  как силу тяги винта, то в эксперименте нужно одновременно обеспечить и продольную, и поперечную неподвижность этого винта. В результате схема проведения опыта получается такой, как показано на рис. 3.

Судно или его рабочая модель кормой через динамометр ( $D_x$  на рис. 3) прикрепляется к неподвижному берегу, и при работающем с частотой оборотов  $n$  двигателе фиксируется сила  $X_n$  на динамометре. Опыт нужно производить при разных значениях  $n$ ; при этом предполагается, что получаемые разные значения  $X_n$  будут, в соответствии с формулой (10), пропорциональны  $n^2$ . По завершении эксперимента на плоскости наносятся точки с координатами  $\rho n^2 D^4$  по одной оси и  $Y_n$  по другой. Полученная экспериментальная зависимость аппроксимируется некоторой прямой, и тангенс ее угла наклона по отношению к оси  $\rho n^2 D^4$  можно принять за искомый коэффициент  $\kappa_T$ . В этом эксперименте попутно проверяется пропорциональность между  $n^2$  и  $X_n$ .

Для дальнейшего сокращения записей введем обозначение

$$v_T = (v_x^2 + (v_y - \omega l_T)^2)^{0.5}, \quad (13)$$

где  $v_T$  – полная линейная скорость точки приложения силы тяги. С его помощью из (10) получаем:

$$X_T = X_n (1 - v_x) [1 + c_{1m} (v_T - v_x) / v_T] = X_n (1 - v_x) [1 + c_{1m} (1 - v_x / v_T)]. \quad (14)$$

Переходя далее к безразмерным скоростям, числитель и знаменатель дроби в правой скобке делим на  $v_n$ , в результате чего получается:

$$X_T = X_n (1 - v_x) [1 + c_{1m} (1 - v_x / v_T)]. \quad (15)$$

Здесь

$$v_T = v_T / v_n = (v_x^2 + (v_y - \omega l_T / v_n)^2)^{0.5} = (v_x^2 + (v_y - \omega \lambda_T)^2)^{0.5}, \quad (16)$$

и

$$v_y = v_y / v_n, \quad \omega = \omega l_T / v_n, \quad \lambda_T = l_T / L. \quad (17)$$

Как видно из описания опыта по определению  $\kappa_T$ , исследуемая модель при его реализации остается неподвижной в продольном и поперечном направлениях и имеет возможность только поворота относительно вертикальной оси, проходящей через точку  $B$ . Очевидно, что проводя эксперимент по определению  $X_n$  несколько раз для различных  $n$ , судно придется периодически возвращать в исходное положение, показанное на рис. 3, и освобождать его от прочих связей только при установившемся режиме вращения винта.

Перейдем теперь к описанию действующих на судно **поперечных сил**. Боковую силу представляем в виде

$$Y_T = - C_n (v_y - \omega l_T), \quad (18)$$

где

$$C_n = k_{ym} \rho n D^3.$$

Переходя к безразмерным величинам и учитывая иное по сравнению с принятым ранее (Юдин, Котов, 2000) направление оси  $C_y$ , получаем:

$$Y_T = - k_{ym} \rho n D^3 v_n (v_y - \omega \lambda_T) = - k_{ym} \rho n^2 D^3 p (v_y - \omega \lambda_T). \quad (19)$$

Далее по аналогии с (10) можно обозначить

$$k_{ym} \equiv \kappa_{Ty}, \quad \kappa_{Ty} \rho n^2 D^3 p \equiv Y_n, \quad (20)$$

и тогда боковая сила на винте будет выражаться формулой

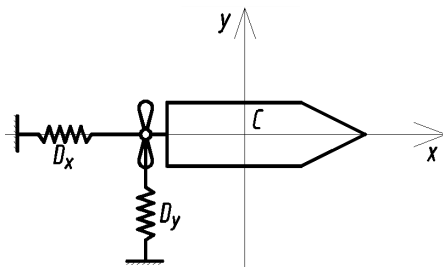


Рис. 3

$$Y_T = - Y_n(v_y - \omega l_T). \quad (21)$$

Здесь параметр  $Y_n$  определяется формулой (20), а безразмерный коэффициент  $\kappa_{Ty}$  должен быть получен из эксперимента по измеренной динамометром боковой силе на винте  $Y_{n3}$ :

$$\kappa_{Ty} = Y_{n3}/(\rho n^2 D^3 p). \quad (22)$$

Знак "минус" в формуле (21) означает, что при правом винте направление силы  $Y_T$  противоположно направлению оси  $C_y$ ; на рис. 2 показано направление положительной силы  $Y_T$ .

Далее естественно возникает вопрос, как определять силу  $Y_{n3}$ . В испытании по определению коэффициента  $\kappa_T$ , изображенном на рис. 3, для обеспечения его чистоты поставлена поперечная связь на винте, и для измерения поперечной силы на винте направляется установка на этой связи динамометра ( $D_y$  на рис. 3). Однако в соответствии с формулой (18) при необходимом для правильного осуществления опыта на рис. 3 условии  $v_y - \omega l_T = 0$  боковая сила на винте  $Y_T$  тоже должна быть равна нулю. Тогда, если теория верна, то с помощью динамометра  $D_y$  мы можем в эксперименте по рис. 3 только констатировать равенство нулю поперечной силы и оценить степень ее близости к нулю и тем самым оценить уровень достоверности обсуждаемых здесь соотношений. А для определения  $Y_{n3}$  нужен другой эксперимент.

Здесь можно предложить схему, изображенную на рис. 4. В ней  $v_y = 0$ ,  $\omega \neq 0$ , и, измеряя динамометром  $Y_T$ , из (21) получаем  $Y_{n3} = Y_T/(\omega l_T)$  и далее  $\kappa_{Ty}$  по формуле (22).

Заканчивая формирование сил тяги в правой части уравнений (2), отмечаем, что **момент  $M_T$**  связан с возникновением поперечной силы на винте и выражается через нее очевидным образом:

$$M_T = - Y_T l_T. \quad (23)$$

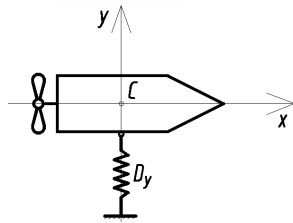


Рис. 4

Знак "минус" здесь обусловлен тем, что положительная поперечная сила в выбранной системе координат создает отрицательный момент. Переходя к безразмерной координате винта в соответствии с последней из формул (17), получаем:

$$M_T = - Y_T \lambda_T L. \quad (24)$$

Перейдем теперь к **силам сопротивления** и начнем со **скоростных**, поскольку они более просто определяются из эксперимента. Форма их связи с компонентами скоростей вытекает из декларированных ранее (с необходимыми аргументами) принципов их взаимной независимости и векторной аддитивности. С учетом согласования сил и скоростей и пропорциональности сил квадратам скоростей это выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} X_v &= - k_x |v_x| v_x, \\ Y_v &= - k_y |v_y| v_y, \\ M_\omega &= - k_\omega |\omega| \omega. \end{aligned} \quad (25)$$

Переходя к относительным скоростям в соответствии с формулами (8) и (17), получаем:

$$\begin{aligned} X_v &= - v_n^2 k_x |v_x| v_x, \\ Y_v &= - v_n^2 k_y |v_y| v_y, \\ M_\omega &= - (v_n^2/L^2) k_\omega |\omega| \omega. \end{aligned} \quad (26)$$

Коэффициенты  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_\omega$  здесь подразумеваются положительными константами и определяются из эксперимента, который теоретически выглядит очень просто. Нужно двигать внешним источником модель в исследуемом направлении с постоянной скоростью и динамометром измерять движущую силу. Из экспериментальных значений скорости и силы коэффициенты выражаются с помощью формул (26):

$$k_x = X_{v3}/v_{x3}^2; \quad k_y = Y_{v3}/v_{y3}^2; \quad k_\omega = M_{\omega3}/\omega_3^2. \quad (27)$$

Практическая сложность реализации заключается в том, что достаточно трудно установить, является ли в самом деле движение равномерным на рассматриваемом отрезке. Можно было бы рассуждать так: при равномерном движении сила сопротивления постоянна и равна движущей силе; следовательно, если движущая сила постоянна, то движение равномерно. Однако вторая часть последнего предложения легко опровергается: постоянной силе тяги может соответствовать и равноускоренное движение: так будет, если сила сопротивления меньше силы тяги. Таким образом, наблюдаемое постоянство силы тяги само по себе не может быть гарантом равномерности движения.

Однако, с другой стороны, если сила тяги постоянна, а движение при этом происходит с ускорением, то возрастает скорость судна, и вместе с ней – сила скоростного сопротивления. Если даже при этом предположить постоянство инерционной силы сопротивления, то все равно сумма этих сил в

конце концов компенсирует поддерживаемую постоянной силой тяги, и движение неизбежно станет равномерным. На самом же деле скоростная сила сопротивления, возрастая, уменьшает свободную часть силы тяги, создающую ускорение, и ускорение вследствие этого будет уменьшаться до нуля. При нулевом ускорении исчезнет и инерционная сила сопротивления, т.е. наблюдаемая сила тяги станет равной скоростной силе сопротивления.

Отсюда вывод: чтобы измерить скоростную силу сопротивления, нужно судно достаточно длительное время двигать внешним источником с постоянной силой тяги. Тогда в последней фазе этого процесса движение обязательно станет равномерным, а сила тяги – равной силе скоростного сопротивления, соответствующей данной установившейся скорости.

Все это не требовало бы таких пространственных рассуждений, если имелось бы надежное внутреннее по отношению к судну средство для измерения его мгновенной скорости. Однако вряд ли можно указать такое средство, т.к. относительную скорость корпуса и обтекающих его потоков жидкости нельзя считать скоростью движения судна по акватории: эти потоки, вообще говоря, движутся по-разному. Опираясь же на береговые ориентиры представляется технически малоэффективным по соображениям сложности реализации и обеспечения достаточной точности. В любом эксперименте лучше использовать наиболее простые и, следовательно, наиболее надежные средства измерений.

С учетом сказанного можно предложить такую схему осуществления эксперимента по определению скоростных сил сопротивления судна (рис. 5). На неподвижной акватории нужно зафиксировать буями две точки вдоль некоторой прямой ( $A$  и  $B$ ). Движение судна начать с исходной позиции, отстоящей от одного из буюв на расстояние, примерно равное расстоянию между буями (точка  $S$ ). Далее двигать судно внешним двигателем с постоянной силой тяги  $F_T$  вдоль прямой, соединяющей два установленных буя  $A$  и  $B$ , и измерить время прохождения судном отрезка между буями. Поделив расстояние между буями на измеренное время, получим скорость, соответствующую силе сопротивления, равной измеренной параллельно динамометром силе тяги внешнего источника. Повторяя этот опыт для разных сил тяги, получим зависимость силы скоростного сопротивления от скорости движения.

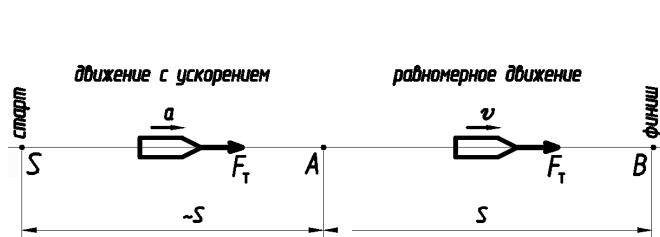


Рис. 5

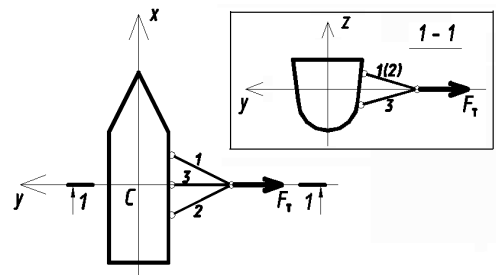


Рис. 6

Принципиальная схема проведения опыта по определению поперечной силы скоростного сопротивления должна выглядеть аналогично. Здесь только следует обратить особое внимание на то, чтобы внешняя сила тяги во избежание поворотов корпуса проходила бы через центр тяжести судна (в отношении продольной силы это проще, т.к. судно в этом направлении симметрично). Кроме того, чтобы исключить колебания корпуса относительно вертикальной и продольной осей, реальное воздействие поперечной силы внешней тяги на корпус судна лучше передавать в трех точках корпуса с тем, чтобы равнодействующая была направлена строго по оси  $C_y$ , без угловых отклонений и без параллельных смещений (см. рис. 6).

Сложнее обстоит дело с реализацией опыта по определению скоростного момента сопротивления. Его принципиальная схема представлена на рис. 7.

Здесь потребуются два внешних движителя с динамометрами, контролирующими силу тяги  $F_T$ . Тогда  $M_\omega = M_T = F_T d$ . При этом пара канатов, намотанных на барабан диаметром  $d$ , должна иметь достаточно большую длину, т.к. сила  $F_T$  должна поддерживаться некоторое конечное время, пока не установится режим равномерного вращения. Угловая скорость измеряется путем фиксации времени  $t$  одного оборота по какому-либо внешнему ориентиру, тогда угловая скорость  $\omega = 2\pi/t$ .

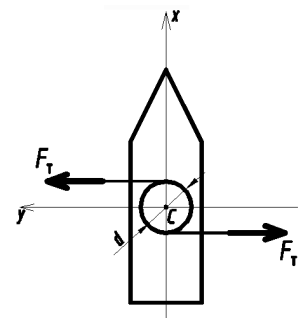


Рис. 7

При осуществлении испытаний по схеме на рис. 7 может возникнуть сложность в выравнивании усилий на двух динамометрах. Но делать это необходимо: в противном случае центр тяжести судна будет двигаться, и это нарушит чистоту измерений, т.к. вмешаются силы поступательного скоростного сопротивления. По этой же причине нельзя ограничиться

только одним внешним двигателем, зафиксировав второй канат на каком-нибудь неподвижном береговом основании: в этом случае ц.т. судна также будет перемещаться, искажая моментное сопротивление.

**Инерционные силы сопротивления** с кинематическими параметрами движения связаны еще более просто, чем скоростные. Именно:

$$\begin{aligned} X_{и} &= -\lambda_{11} d v_x / dt, \\ Y_{и} &= -\lambda_{22} d v_y / dt, \\ M_{и} &= -\lambda_{66} d \omega / dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь коэффициенты  $\lambda_{ii}$  совсем не обязательно трактовать, соблюдая традицию, как присоединенные массы. При декларируемом в данном цикле статей феноменологическом подходе к описанию движения судна по акватории можно считать эти параметры просто коэффициентами пропорциональности между инерционными силами сопротивления и соответствующими ускорениями. В такой трактовке с учетом перехода к безразмерным скоростям их удобнее записать в виде

$$\begin{aligned} X_{и} &= -v_n^2 \lambda_x d v_x / dt, \\ Y_{и} &= -v_n^2 \lambda_y d v_y / dt, \\ M_{и} &= -(v_n^2 / L^2) \lambda_\omega d \omega / dt, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_\omega$  – коэффициенты пропорциональности, подлежащие определению из эксперимента.

В этом отношении можно провести следующие рассуждения. Если судно (или модель) движется внешним двигателем равноускоренно, то инерционная сила сопротивления должна оставаться постоянной, а скоростная сила сопротивления должна возрастать (пропорционально квадрату скорости). Следовательно, измеряемая динамометром сила тяги внешнего двигателя также должна возрастать. Таким образом, если в ходе эксперимента контролируемым фактором является сила на динамометре, то эта сила для обеспечения ускоренного движения должна возрастать пропорционально квадрату соответствующей скорости. Но как внутри силы на динамометре отделить инерционную силу сопротивления от скоростной?

На этот непростой вопрос можно попытаться ответить следующим образом. Допустим, что имеется возможность двигать изучаемый объект внешним двигателем (буксиром) через динамометр с постоянно возрастающей фиксируемой динамометром силой тяги до некоторой предельно возможной величины этой силы. Для определенности будем говорить сначала о движении в продольном по отношению к судну направлении  $Ox$ . Измерив в предварительном опыте длину пути  $S$ , которую удастся пройти за время доступного роста силы тяги, разделим ее на некоторое количество  $N$  равных отрезков  $s$ . Зафиксировав границы отрезков нумерованными буями  $0, 1, 2, \dots, i, \dots, N$ , вновь протягиваем исследуемый объект с непрерывно возрастающей силой внешней тяги вдоль испытательного пути  $S$ , фиксируя отсчеты времени  $T_i$  и силу тяги  $D_i$  в момент прохождения каждого буя. Тогда время  $t_i$  прохождения  $i$ -того отрезка составляет  $t_i = T_i - T_{i-1}$ , а средняя скорость на отрезке:  $v_i = s / t_i$ . Каждому отрезку можно приписать также некоторую среднюю динамометрическую силу тяги  $X_i = (D_{i-1} + D_i)/2$ , а также среднюю силу скоростного сопротивления  $X_{vi} = k_x v_i^2$ . Тогда, если теория достаточно реально описывает движение судна, должно выполняться соотношение  $X_i > X_{vi}$ , а разница между этими величинами и представляет собой инерционную силу сопротивления:  $X_{иi} = X_i - X_{vi}$ .

Соответствующее ускорение определяется как  $a_i = (v_{xi} - v_{xi-1})/t_i$ , после чего получаем искомые коэффициенты пропорциональности

$$\lambda_{xi} = X_{иi} / a_i,$$

которые далее усредняем по отрезкам  $s_i$ :

$$\lambda_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_{xi}.$$

Коэффициент  $\lambda_y$  определяется аналогично, только испытываемая модель должна протягиваться не носом, а бортом вперед, что, возможно, будет создавать некоторые дополнительные трудности.

Для определения величины  $\lambda_\omega$  опыт необходимо проводить по схеме на рис. 7, только сила тяги  $F_T$  должна быть не постоянной, а непрерывно увеличиваться. При этом, конечно, удержать испытываемую модель на одной и той же оси вращения будет еще труднее, чем в опыте по определению  $k_\omega$ . Здесь, видимо, придется предусмотреть некоторую материальную ось, фиксирующую положение центра тяжести модели. В зависимости от величины полного угла  $\Phi$ , которого удастся достичь за время доступного роста силы тяги  $F_T$ , угловые отрезки  $\phi_i = \Phi/N$  можно фиксировать в долях от одного полного оборота: четвертях ( $90^\circ$ ), половинках ( $180^\circ$ ) и т.п. Установить для этого соответствующие ориентиры на "линии горизонта" не представляется затруднительным.

В уравнениях движения (2) остались не определенными **силы на руле**  $X_r$ ,  $Y_r$  и  $M_r$ . В настоящей работе мы не ставили своей целью утвердить в их отношении что-либо новое. Поэтому эти силы можно принять в каком-нибудь традиционном виде, например (Юдин, Котов, 2000):

$$\begin{aligned} X_r &= Y_r \operatorname{tg} \delta_r; \\ Y_r &= -k_r(\operatorname{arctg}((v_y - \omega L_r)/v_x) + \delta_r)(v_x^2 + (v_y - \omega L_r)^2); \\ M_r &= Y_r l_r. \end{aligned}$$

В относительных величинах первая и третья из последней группы формул сохраняют свой вид, а вторая видоизменяется:

$$Y_r = -k_r(\operatorname{arctg}((v_y - \omega l_r/L)/v_x) + \delta_r)(v_x^2 + (v_y - \omega l_r/L)^2) v_n^2.$$

Обозначая  $l_r/L = \lambda_r$ , окончательно получаем:

$$\begin{aligned} X_r &= Y_r \operatorname{tg} \delta_r; \\ Y_r &= -k_r(\operatorname{arctg}((v_y - \omega \lambda_r)/v_x) + \delta_r)(v_x^2 + (v_y - \omega \lambda_r)^2) v_n^2; \\ M_r &= Y_r \lambda_r L. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, все силы, находящиеся в правых частях уравнений (2), оказались записанными в относительных скоростях. Для сил тяги это формулы (15), (21), (25); для скоростных сил сопротивления – формулы (26); для инерционных сил сопротивления – (29); для сил на руле – формулы (30). Но тогда и левые части уравнений (2) логично записать в относительных величинах. В результате они примут вид

$$\begin{aligned} m(dv_x/dt - v_y \omega) &\equiv mp(nv_x^{\bullet} + n^{\bullet}v_x - \varepsilon n^2 v_y \circ), \\ m(dv_y/dt + v_x \omega) &\equiv mp(nv_y^{\bullet} + n^{\bullet}v_y - \varepsilon n^2 v_x \circ), \\ J(d\omega/dt) &\equiv J\varepsilon(\circ^{\bullet}n + \circ n^{\bullet}), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\varepsilon = p/L; \quad (32)$$

производная по времени здесь для краткости обозначена точкой. После сопоставления выражений (31) с перечисленными выше формулами для сил с подстановкой в них развернутых коэффициентов из соотношений (10) и (20), с учетом (32), получатся следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (\mu/n + \lambda_x)v_x^{\bullet} + \mu v_x n^{\bullet}/n^2 &= \kappa_T \rho \Delta^2 (1 - v_x)(1 + c_{1m}(1 - v_x/v_T)) - k_x |v_x| v_x - \\ &\quad - k_r(\operatorname{arctg}((v_y - \omega \lambda_r)/v_x) + \delta_r)(v_x^2 + (v_y - \omega \lambda_r)^2) \operatorname{tg} \delta_r + \mu \varepsilon v_y \circ; \\ (\mu/n + \lambda_y)v_y^{\bullet} + \mu v_y n^{\bullet}/n^2 &= -\kappa_T \rho \Delta D (v_y - \omega \lambda_T) - k_y |v_y| v_y - \\ &\quad - k_r(\operatorname{arctg}((v_y - \omega \lambda_r)/v_x) + \delta_r)(v_x^2 + (v_y - \omega \lambda_r)^2) + \mu \varepsilon v_x \circ; \\ J\varepsilon(\circ^{\bullet}n + \circ n^{\bullet}) &= \kappa_{Ty} \rho n^2 D^3 p (v_y - \omega \lambda_T) \lambda_T L - (v_n^2/L^2) k_{\omega} |o| o - \\ &\quad - (v_n^2/L^2) \lambda_{\omega} do/dt + Y_r \lambda_r L. \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mu &= m/p; \\ \Delta^2 &= D^4/p^2. \end{aligned}$$

### 3. Заключение

Степень достоверности динамических уравнений (2) существенно зависит от точности описания сил в их правой части. В современных условиях теоретические способы определения этих сил все еще заметно уступают эмпирическим. Следовательно, все или почти все зависит от аккуратности организации и осуществления опытов по их определению для конкретного класса плавающих тел. В настоящей работе такие опыты описаны, по нашему мнению, с достаточными для их практической реализации подробностями. Без этого цикл работ о нетрадиционном для судоводительской литературы формировании математической модели плоско-параллельного движения судна остался бы незавершенным.

Одновременное приведение уравнений движения к виду с безразмерными кинематическими параметрами и относительными геометрическими характеристиками судна позволяет из одного комплекса экспериментов определять динамические характеристики для достаточно большого класса судов и исключает необходимость экспериментировать с каждым из них.

### Литература

- Котов А.А., Красносельский М.Н.** Нетрадиционный путь формирования уравнений движения судна. *Вестник МГТУ*, т.9, № 2, с.253-259, 2006.
- Юдин Ю.И., Котов А.А.** Проблемы безопасности буксировки морем крупногабаритных объектов. *Деп. ВИНТИ*, № 02200100037, 2000.