УДК 536.24

Ю.В. Видин, Р.В. Казаков

Расчет распределения температуры в ребре постоянного поперечного сечения при радиационном отводе тепла с его поверхности

Yu.V. Vidin, R.V. Kazakov

Calculation of temperature distribution in rib with constant cross-section and radiative heat transfer on surface

Аннотация. Разработан приближенный аналитический метод расчета распределения температуры вдоль стержня постоянного поперечного сечения при радиационном теплообмене на его поверхности. Предложенный метод основан на получении нижней и верхней оценок искомого поля температуры. При этом используется интегральное линеаризующее преобразование, благодаря которому удалось существенно уменьшить влияние нелинейного члена в исходном дифференциальном уравнении. Полученные аналитические выражения позволяют сравнительно просто оценить максимальное и минимальное значение температуры по длине ребра. При умеренных значениях радиационного числа Старка интервал между верхней и нижней границами оказывается небольшим. При повышенных числах Старка расхождение между граничными значениями несколько возрастает. Однако средняя арифметическая величина между этими граничными температурами получается не слишком отличающейся от действительной.

Abstract. The approximate analytical calculation method of temperature distribution along the rib with constant cross-section and radiative heat transfer on surface has been developed. The method is based on calculation of the lowest and highest parameters of the temperature field. By using the integral linearizing transformation the authors considerably decrease impact of the nonlinear term in the basic differential equation. The found analytical formulas have allowed comparatively easy calculate the maximum and minimum temperature indexes along the rib. The interval between the minimum and maximum index is minor with the minor index of the Stark number. With the Stark number increasing the interval between the minimum and maximum increases. But the arithmetical mean of these boundary temperatures is not too different from the real one.

Ключевые слова: температурное поле, радиационный теплообмен, граничные значения, аналитический метод, ребристая поверхность

Key words: temperature field, radiative heat transfer, boundary conditions, analytical method, ribbed surface

1. Введение

В монографии (*Керн, Краус*, 1977) представлен всесторонний математический анализ процессов переноса тепла через различные стенки, оснащенные ребрами разной конфигурации. При этом рассмотрены главным образом задачи, относящиеся к классу линейных. Однако на практике имеют место случаи, когда тепловой поток, отдаваемый ребристой поверхностью, является нелинейной функцией его температуры. Так, например, возможен процесс радиационного охлаждения в среде с температурой близкой к нулю (в условиях вакуума).

Такая задача, представляющая определенный инженерный интерес, может быть теоретически сформулирована следующим образом

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\sigma}{\lambda}\frac{f}{P}T^4 = 0\,, \tag{1}$$

$$T = T_0 \text{ при } x = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \text{ при } x = l, \tag{3}$$

где $T = T(x)$ – искомое распределение температуры вдоль оси ребра, К; T_0 – абсолютная температура основания ребра, К; λ – коэффициент теплопроводности материала, Вт/мК; σ – видимый коэффициент теплообмена излучением, Вт/м^{2}К^4; P, f – периметр и площадь поперечного стержня соответственно, м, м^2; l – длина ребра, м.

2. Результаты исследований

Целесообразно систему (1-3) привести к безразмерному виду.

Если ввести безразмерные комплексы $\vartheta = \frac{T}{T_0}$; $X = \frac{x}{l}$; $Sk = \frac{\sigma P l^2}{\lambda f} T_0^3$, где Sk – число Старка, то система (1-3) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\vartheta}{dX^2} = Sk\vartheta^4, \tag{4}$$

$$\vartheta = 1 \text{ при } X = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d\vartheta}{dX} = 0 \text{ при } X = 1. \tag{6}$$

Так как дифференциальное уравнение (4) является существенно нелинейным, получить его строгое аналитическое решение весьма затруднительно. Поэтому целесообразно применить к задаче (4-5) наиболее эффективный приближенный аналитический подход. Для ослабления нелинейности в уравнении (4) может быть применен метод интегрального линейного преобразования, предложенный в работе (*Видин*, 1992). Для этого нужно ввести новую зависимую переменную, связанную с искомой температурой ϑ (X) соотношением

$$U = \int_1^{\vartheta} \frac{d\eta}{\eta^4} = \frac{1}{3}(1 - \vartheta^{-3}). \tag{7}$$

Тогда система (4-6) запишется следующим образом

$$\frac{d^2U}{dX^2} + 4\vartheta^3 \left(\frac{dU}{dX}\right)^2 - Sk = 0, \tag{8}$$

$$U = 0 \text{ при } X = 0, \tag{9}$$

$$\frac{dU}{dX} = 0 \text{ при } X = 1. \tag{10}$$

Если в первом приближении функцией $F(X) = 4\vartheta^3 \left(\frac{dU}{dX}\right)^2$, входящей в уравнение (8), пренебречь, то нетрудно получить решение в форме

$$U = SkX\left(\frac{X}{2} - 1\right). \tag{11}$$

Отсюда с учетом (7) следует, что

$$\vartheta = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + 3SkX\left(1 - \frac{X}{2}\right)}}. \tag{12}$$

Так как комплекс $F(X) = 4\vartheta^3 \left(\frac{dU}{dX}\right)^2$ является на отрезке (X = 0-1) положительной величиной, т.е. представляет собой некоторый условный дополнительный тепловой источник в стержне, то, очевидно, что выражение (12) дает заниженное значение искомого распределения температуры ϑ (X) при $X > 0$. Наименьшая величина безразмерной температуры ребра будет на его вершине (при $X = 1$). Эта температура согласно (12) равна

$$\vartheta_{\min} = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \frac{3}{2}Sk}}. \tag{13}$$

Если теперь в уравнение (8) подставить вместо комплекса $F(X) = 4\vartheta^3 \left(\frac{dU}{dX}\right)^2$ приближенное значение $F(X) = 4\vartheta_{\min}^3 \left(\frac{dU}{dX}\right)^2$, оно примет вид

$$\frac{d^2U}{dX^2} + \frac{4}{1 + \frac{3}{2}Sk}\left(\frac{dU}{dX}\right)^2 - Sk = 0. \tag{14}$$

Обозначим

$$W = \frac{dU}{dX}, \tag{15}$$

причем

$$W = 0 \text{ при } X = 1. \tag{16}$$

Для новой переменной W дифференциальное уравнение (14) запишется

$$\frac{dW}{dX} + \frac{8}{2+3Sk}W^2 - Sk = 0. \tag{17}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (17) с учетом условия (16) можно получить следующее аналитическое решение

$$W = \sqrt{\frac{(2+3Sk)Sk}{8}}\,\frac{\exp - 4\sqrt{\frac{2Sk}{2+3Sk}}(1-x) - 1}{\exp - 4\sqrt{\frac{2Sk}{2+3Sk}}(1-x) + 1}. \tag{18}$$

Формулу (18) также можно представить в более удобном виде через гиперболический тангенс (*Бронштейн, Семендяев*, 1965)

$$W = -\sqrt{\frac{(2+3Sk)Sk}{8}}\,th\left[2\sqrt{\frac{2Sk}{2+3Sk}}(1-X)\right]. \tag{19}$$

Затем на основе выражения (15) легко установить зависимость для функции U (*Бронштейн, Семендяев*, 1965)

$$U = \frac{2+3Sk}{8}\ln\left[\frac{ch\sqrt{\frac{8Sk}{2+3Sk}}(1-X)}{ch\sqrt{\frac{8Sk}{2+3Sk}}}\right]. \tag{20}$$

Используя это решение, удается окончательно установить нижнюю границу для искомого температурного поля рассматриваемого тела

$$\vartheta_{наим.} = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \frac{3(2+3Sk)}{8}\ln\left[\frac{ch\sqrt{\frac{8Sk}{2+3Sk}}}{ch\sqrt{\frac{8Sk}{2+3Sk}}(1-X)}\right]}}. \tag{21}$$

Аналогичным образом находится верхняя граница для функции $\vartheta = \vartheta(X)$. С этой целью уравнение (8) записывается в виде

$$\frac{d^2U}{dX^2} + 4\left(\frac{dU}{dX}\right)^2 - Sk = 0, \tag{22}$$

т.е. фиктивный тепловой источник в стержне $F(X)$ берется по максимально возможной величине. Интегрируя систему (22), (9-10) подобно тому, как это было изложено ранее, находится новое соотношение для переменной U

$$U = \frac{1}{4}\ln\left[\frac{ch2\sqrt{Sk}(1-X)}{ch2\sqrt{Sk}}\right]. \tag{23}$$

Отсюда следует, что формула для расчета верхних граничных значений искомого распределения температуры будет иметь вид

$$\vartheta_{наиб.} = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \frac{3}{4}\ln\left[\frac{ch2\sqrt{Sk}}{ch2\sqrt{Sk}(1-X)}\right]}}. \tag{24}$$

Проведение практических расчетов по зависимостям (21) и (24) не представляет затруднений, так как гиперболические функции подробно затабулированы (*Сегал, Семендяев*, 1962).

В таблице представлены результаты вычислений безразмерной температуры в сечении $X = 0{,}5$ и $X = 1$ для чисел Старка $Sk = 0{,}1; 0{,}5; 1{,}0$.

Таблица

X	$Sk = 0{,}1$		$Sk = 0{,}5$		$Sk = 1{,}0$	
	$\vartheta_{\text{наим.}}$	$\vartheta_{\text{наиб.}}$	$\vartheta_{\text{наим.}}$	$\vartheta_{\text{наиб.}}$	$\vartheta_{\text{наим.}}$	$\vartheta_{\text{наиб.}}$
0,5	0,963	0,968	0,881	0,892	0,813	0,843
1,0	0,957	0,957	0,848	0,858	0,767	0,795

3. Заключение

На основе результатов, представленных в таблице, можно сделать ряд выводов:

1. Различие между $\vartheta_{\text{наим.}}$ и $\vartheta_{\text{наиб.}}$ при небольших числах *Sk* почти отсутствует.
2. С ростом величины *Sk* различие между $\vartheta_{\text{наим.}}$ и $\vartheta_{\text{наиб.}}$ возрастает. Однако по абсолютной величине невязка $\Delta\vartheta = \vartheta_{наиб.} - \vartheta_{наим.}$ оказывается с инженерной точки зрения небольшой.
3. Очевидно, что среднее арифметическое значение температуры $\vartheta = \frac{\vartheta_{наиб.} + \vartheta_{наим.}}{2}$ будет обладать высокой точностью при любом значении числа *Sk*.

Литература

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М., Наука, 1965. 609 с.

Видин Ю.В. Инженерные методы теплопроводности. Красноярск, Изд-во Красноярского государственного университета, 1992. 96 с.

Керн Д., Краус А. Развитые поверхности теплообмена. М., Энергия, 1977. 461 с.

Сегал Б.И., Семендяев К.А. Пятизначные математические таблицы. М., Государственное изд-во физико-математической литературы, 1962. 450 с.

References

Bronshtein I.N., Semendyaev K.A. Spravochnik po matematike [Mathematical guide]. M., Nauka, 1965. 609 p.

Vidin Yu.V. Injenernie metodi teploprovodnosti [Engineering approach in thermal conductivity]. Krasnoyarsk, Izd-vo Krasnoyarskogo gosudarstvennogo universiteta, 1992. 96 p.

Kern D., Kraus A. Razvitie poverhnosi teploobmena [Developed heat exchange surfaces]. M., Energia, 1977. 461 p.

Segal B.I., Semendyaev K.A. Pyatiznachnie matematicheskie tablici [Five-place mathematical tables]. M., Gosudarstvennoe izd-vo fiziko-matematicheskoy literaturi, 1962. 450 p.

Информация об авторах

Казаков Роман Владимирович – Политехнический институт Сибирского федерального университета, кафедра теплотехники и гидрогазодинамики, канд. техн. наук, доцент, e-mail: roman.kazakov@list.ru

Kazakov R.V. – Polytechnic Institute, Siberian Federal University, Department of Heat Engineering and Hydraulic Gas Dynamics, Cand. of Tech. Sci., Associate Professor, e-mail: roman.kazakov@list.ru

Видин Юрий Владимирович – Политехнический институт Сибирского федерального университета, кафедра теплотехники и гидрогазодинамики, канд. техн. наук, профессор, e-mail: roman.kazakov@list.ru

Vidin Yu.V. – Polytechnic Institute, Siberian Federal University, Department of Heat Engineering and Hydraulic Gas Dynamics, Cand. of Tech. Sci., Professor, e-mail: roman.kazakov@list.ru